

文章编号:1005-3085(2009)05-0946-05

带 B-D 反应项的捕食-食饵模型正解的一致持续性*

郭改慧, 李艳玲

(陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安 710062)

摘 要: 本文利用上下解方法和稳定性理论, 讨论了一类带 Beddington-DeAngelis 反应项的捕食-食饵模型解的渐近行为, 给出了正解一致持续的充分条件。同时, 利用上下解方法证明了一个正的全局吸引子的存在性。文中的结果表明, 在一定的条件下, 相互作用的种群是可以持续生存的。

关键词: Beddington-DeAngelis 反应项; 稳定; 一致持续

分类号: AMS(2000) 35K57

中图分类号: O175.26

文献标识码: A

1 引言

本文主要研究一类带 Beddington-DeAngelis (简称 B-D) 反应项的捕食-食饵模型

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \left(a - u - \frac{bv}{1+mu+kv}\right)u, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ v_t - \Delta v = \left(c - v + \frac{du}{1+mu+kv}\right)v, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中 Ω 为 \mathbf{R}^n 中具有光滑边界的有界开区域, a, b, d 均为正常数, m, k 为非负常数, c 可正可负。模型 (1) 的生物背景和各参数的生物意义可参见文献 [1,2]。本文将给出 (1) 正解的一致持续性及全局吸引子的存在性, 所采用的方法是上下解方法和稳定性理论。

2 准备知识

设 λ_1 是算子 $-\Delta$ 在齐次 Dirichlet 边界条件下的主特征值, 相对应的特征函数不妨设为 $\Phi_1 > 0$ ($x \in \Omega$)。记问题

$$-\Delta u + q(x)u = \lambda u, \quad x \in \Omega, \quad u = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

的主特征值为 $\lambda_1(q)$, 其中 $q(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$ 。显然 $\lambda_1(0) = \lambda_1$, 且 $\lambda_1(q)$ 关于 q 严格单调递增。考虑单个方程

$$-\Delta u = uf(x, u), \quad x \in \Omega, \quad u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

其中 $f(x, u) : \bar{\Omega} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ 满足

收稿日期: 2008-01-07. 作者简介: 郭改慧 (1979年9月生), 女, 博士. 研究方向: 微分方程及其计算.

*基金项目: 国家自然科学基金 (10571115); 国家自然科学基金数学天元青年基金 (10726042).

(H1) $f(x, u)$ 是关于 x 的 C^α 函数, $0 < \alpha < 1$;

(H2) $f(x, u)$ 是关于 u 的 C^1 函数, 且对任意的 $(x, u) \in \bar{\Omega} \times [0, +\infty)$, $f_u(x, u) < 0$;

(H3) 存在常数 $C > 0$, 使得当 $(x, u) \in \bar{\Omega} \times [C, +\infty)$ 时, $f(x, u) < 0$.

引理 1^[3] 如果 $f(x, u)$ 满足 (H1)-(H3), 则有以下结论:

(i) 若 $\lambda_1(-f(x, 0)) \geq 0$, 则 (2) 没有正解。而且, 平凡解 $u = 0$ 是整体渐近稳定的;

(ii) 若 $\lambda_1(-f(x, 0)) < 0$, 则 (2) 存在惟一正解, 且是整体渐近稳定的。

本文主要讨论系统 (1) 解的长时行为。为此, 首先证明系统 (1) 的解是全局存在的。

令

$$f(u, v) = u \left(a - u - \frac{bv}{1 + mu + kv} \right), \quad g(u, v) = v \left(c - v + \frac{du}{1 + mu + kv} \right).$$

显然 f, g 在 $[u, \bar{u}] \times [v, \bar{v}]$ 上满足 Lipschitz 条件。令 U, V_U 分别是方程

$$\begin{cases} U_t - \Delta U = U(a - U), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ U = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ U(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega \end{cases} \quad (3)$$

和

$$\begin{cases} (V_U)_t - \Delta V_U = V_U \left(c - V_U + \frac{dU}{1 + mU + kV_U} \right), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ V_U = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ V_U(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \Omega \end{cases} \quad (4)$$

的解。利用文献 [4] 中定理 12.5 可得

定理 1 令 $(u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x)) \geq (0, 0)$, 那么 (1) 存在惟一整体解 (u, v) 满足

$$(0, 0) \leq (u, v) \leq (U, V_U), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty).$$

若 $u_0 \not\equiv 0$ 且 $v_0 \not\equiv 0$, 则 (u, v) 是 (1) 的正解。

3 正解的一致持续性

方程 (1) 对应的平衡态方程为

$$\begin{cases} -\Delta u = \left(a - u - \frac{bv}{1 + mu + kv} \right) u, & x \in \Omega, \\ -\Delta v = \left(c - v + \frac{du}{1 + mu + kv} \right) v, & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5)$$

显然 (5) 有平凡解 $(0, 0)$ 。由准备知识很容易看出, 当 $a > \lambda_1$ 时, (5) 有半平凡解 $(\Theta_{[a]}, 0)$; 当 $c > \lambda_1$ 时, (5) 有半平凡解 $(0, \Theta_{[c]})$ 。

本节首先给出平凡解、半平凡解的渐近性和稳定性情况, 即引理 2-6, 这与方程 (1) 正解的一致持续性密切相关。由于这些引理的证明是基本的, 在这里我们只给出结论。

引理 2 对任意 $x \in \bar{\Omega}$, 若 $a \leq \lambda_1$, $c \leq \lambda_1$, 则 (1) 的解 (u, v) 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} (u, v) = (0, 0)$; 若 $a \leq \lambda_1$, $c > \lambda_1$, 则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} (u, v) = (0, \Theta_{[c]})$ 。

引理3 设 $a > \lambda_1$, $c + \frac{da}{1+ma} < \lambda_1$, 则(1)的解 (u, v) 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u, v) = (\Theta_{[a]}, 0).$$

引理4 设

$$\lambda_1 - \frac{da}{1+ma} < c < \lambda_1,$$

则存在 $\alpha > \lambda_1$, 满足

$$c = \lambda_1 \left(-\frac{d\Theta_{[\alpha]}}{1+m\Theta_{[\alpha]}} \right),$$

使得当 $\lambda_1 < a < \alpha$ 时, $(\Theta_{[a]}, 0)$ 是线性稳定的; 当 $a > \alpha$ 时, $(\Theta_{[a]}, 0)$ 是不稳定的。

引理5 若 $a > \lambda_1$, $c > \lambda_1$, 则 $(\Theta_{[a]}, 0)$ 是不稳定的。

引理6 若

$$a > \lambda_1 \left(\frac{b\Theta_{[c]}}{1+k\Theta_{[c]}} \right), \quad c > \lambda_1,$$

则 $(0, \Theta_{[c]})$ 是不稳定的。

定义映射 $S(t) : (u_0, v_0) \rightarrow (u(t), v(t)) (\forall t \geq 0)$, 那么 $S(t)$ 是从 $C_0^+(\Omega) \times C_0^+(\Omega)$ 到 $C_0^+(\Omega) \times C_0^+(\Omega)$ 的一个半动力系统。

定理2 若

$$c > \lambda_1, \quad a > \lambda_1 \left(\frac{b\Theta_{[c]}}{1+k\Theta_{[c]}} \right),$$

则方程(1)的解是一致持续的。

证明 令 $X^0 = \{(u, v) \in [C_0^+(\bar{\Omega})]^2 : u(x) > 0, v(y) > 0, \forall x, y \in \Omega\}$ 。显然 X^0 是一个开集, 且关于半动力系统 $S(t)$ 是不变集。 ∂X^0 也是不变的。令

$$X = X^0 \cup \partial X^0, \quad S_a = (\Theta_{[a]}, 0), \quad S_0 = (0, 0), \quad S_c = (0, \Theta_{[c]}).$$

设边界上 $S(t)$ 的 ω -极限集为 A_δ , 由于 S_a 吸引 $\{(u, 0), u \geq 0, u \neq 0\}$, S_c 吸引 $\{(0, v), v \geq 0, v \neq 0\}$, 则 $A_\delta = \{S_a, S_0, S_c\}$ 。令 $M = \{M_1, M_2, M_3\} \equiv \{S_a, S_0, S_c\}$ 是 A_δ 的一个覆盖。因为原点为排斥的, 故在边界上没有一个循环覆盖。我们只须证明 M_i 的稳定集 $W_i^+(M_i)$ 与 X^0 不相交, 即 $W_i^+(M_i) \cap X^0 = \emptyset, i = 1, 2, 3$ 。从而证明这个覆盖是孤立的。

假设 $W_1^+(M_1) \cap X^0 \neq \emptyset$, 则存在 $(u_0, v_0) \in X^0$, 使得对任意的 $x \in \bar{\Omega}$, $(u(t), v(t)) = S(t)(u_0, v_0) \rightarrow (\Theta_{[a]}, 0) (t \rightarrow \infty)$ 。由比较定理知, $v(x, t) \geq V(x, t), x \in \bar{\Omega}, t > 0$, 其中 $V(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} V_t - \Delta V = cV - V^2, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ V = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ V(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

由于 $c > \lambda_1$, 那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} V = \Theta_{[c]}$ 。设 Ω_0 为 Ω 的一个非空子集。令

$$r_1 \triangleq \min_{\Omega_0} \Theta_{[c]}(x),$$

显然 $r_1 > 0$ 。取 $0 < \epsilon_1 < \frac{1}{2}r_1$, 则存在 $t_0 > 0$, 使得

$$v(x, t) \geq V(x, t) \geq \Theta_{[c]} - \epsilon_1 > \frac{1}{2}r_1, \quad x \in \Omega_0, \quad t \geq t_0.$$

与 $\lim_{t \rightarrow \infty} v = 0$ 矛盾。类似可证明 $W_2^+(M_2) \cap X^0 = \emptyset$ 。接下来只须证明 $W_3^+(M_3) \cap X^0 = \emptyset$ 。假设存在 $(u_0, v_0) \in X^0$, 使得对任意的 $x \in \bar{\Omega}$, $(u(t), v(t)) = S(t)(u_0, v_0) \rightarrow (0, \Theta_{[c]})(t \rightarrow \infty)$ 。因此对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $t'_0 > 0$, 使得

$$0 \leq u(x, t) < \epsilon, \quad |v(x, t) - \Theta_{[c]}(x)| < \epsilon, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t \geq t'_0.$$

由比较定理知, $u(x, t) \geq \tilde{U}(x, t)$, 其中 $\tilde{U}(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} \tilde{U}_t - \Delta \tilde{U} = a\tilde{U} - \tilde{U}^2 - \frac{b(\Theta_{[c]} + \epsilon)}{1 + k(\Theta_{[c]} + \epsilon)} \tilde{U}, & x \in \Omega, \quad t \geq t'_0, \\ \tilde{U} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq t'_0, \\ \tilde{U}(x, t'_0) = u(x, t'_0), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (6)$$

由于

$$a > \lambda_1 \left(\frac{b\Theta_{[c]}}{1 + k\Theta_{[c]}} \right),$$

选取充分小 ϵ , 使得

$$a > \lambda_1 \left(\frac{b(\Theta_{[c]} + \epsilon)}{1 + k(\Theta_{[c]} + \epsilon)} \right),$$

从而有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{U} = \tilde{U}_a$, 其中 \tilde{U}_a 是 (6) 所对应的平衡态系统的惟一正解。令

$$r_2 \triangleq \min_{\bar{\Omega}_0} U_a(x),$$

显然 $r_2 > 0$ 。取 $0 < \epsilon_2 < \frac{1}{2}r_2$, 那么存在 $t''_0 > t'_0$, 使得

$$u(x, t) \geq \tilde{U}(x, t) \geq \tilde{U}_a - \epsilon_2 \geq r_2 - \epsilon_2 > \frac{1}{2}r_2, \quad x \in \bar{\Omega}_0, \quad t \geq t''_0.$$

与 $\lim_{t \rightarrow \infty} u = 0$ 矛盾。因此 M 是 A_δ 的一个孤立覆盖, 进而由文献 [5] 中定理 4.1 可得, 当

$$c > \lambda_1, \quad a > \lambda_1 \left(\frac{b\Theta_{[c]}}{1 + k\Theta_{[c]}} \right)$$

时, (1) 的解是一致持续的。

设 $a - \frac{b}{k} > \lambda_1$, $c > \lambda_1$ 。令 Φ_1, Φ_2 分别为对应于 $\lambda_1(-a + \frac{b}{k})$ 和 $\lambda_1(-c)$ 的主特征函数。取 ρ_1, ρ_2 充分小, 则 $(\Theta_{[a]}, V_{\Theta_{[a]}}), (\rho_1\Phi_1, \rho_2\Phi_2)$ 即为 (5) 的一对上下解, 其中 $V_{\Theta_{[a]}}$ 是方程

$$\begin{cases} -\Delta V_{\Theta_{[a]}} = V_{\Theta_{[a]}} \left(c - V_{\Theta_{[a]}} + \frac{d\Theta_{[a]}}{1 + m\Theta_{[a]} + kV_{\Theta_{[a]}}} \right), & x \in \Omega, \\ V_{\Theta_{[a]}} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的惟一正解。

下面的定理给出了全局吸引子的存在性。

定理 3 如果 $a - \frac{b}{k} > \lambda_1$, $c > \lambda_1$, 那么 (5) 存在一对拟解, 即存在 $(\tilde{u}, \tilde{v}), (\hat{u}, \hat{v})$, 且 $\tilde{u} \geq$

$\hat{u}, \hat{v} \geq \tilde{u}, \tilde{v}$, 满足方程

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} = (a - \tilde{u} - \frac{b\tilde{v}}{1+m\tilde{u}+k\tilde{v}})\tilde{u}, & x \in \Omega, \\ -\Delta \hat{u} = (a - \hat{u} - \frac{b\hat{v}}{1+m\hat{u}+k\hat{v}})\hat{u}, & x \in \Omega, \\ -\Delta \tilde{v} = (c - \tilde{v} + \frac{d\tilde{u}}{1+m\tilde{u}+k\tilde{v}})\tilde{v}, & x \in \Omega, \\ -\Delta \hat{v} = (c - \hat{v} + \frac{d\hat{u}}{1+m\hat{u}+k\hat{v}})\hat{v}, & x \in \Omega, \\ \hat{u} = \tilde{u} = 0, \quad \hat{v} = \tilde{v} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

且 $[\hat{u}, \hat{u}] \times [\hat{v}, \hat{v}]$ 是 (1) 的一个正的全局吸引子。

证明 由比较原理及文献[6], 我们很容易找到 (5) 的一对拟解。关于全局吸引子的存在性, 利用文献[4, 6], 我们只须说明存在 $t_* > 0$, 使得当 $t = t_*$ 时, (1) 对应于任意初值 $(u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x)) \geq (0, 0), \neq (0, 0)$ 的解 (u, v) 满足

$$(u, v) \in [\rho_1 \Phi_1, \Theta_{[a]}] \times [\rho_2 \Phi_2, V_{\Theta_{[a]}}].$$

设 (u, v) 是 (1) 的一个正解, 由定理 1 知, $u \leq U(x, t), v \leq V_U(x, t)$, 其中 U, V_U 分别是 (3), (4) 的解。由于当 $t \rightarrow \infty$ 时, $U(x, t) \rightarrow \Theta_{[a]}, V_U(x, t) \rightarrow V_{\Theta_{[a]}}$, 那么存在 $T < \infty$, 使得对任意 $t \geq T$,

$$u(x, t) \leq \Theta_{[a]}, \quad v(x, t) \leq V_{\Theta_{[a]}}, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

因此存在 $t_* > 0$, 使得当 $t = t_*$ 时, (1) 对应于任意初值 $(u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x)) \geq (0, 0), \neq (0, 0)$ 的解 (u, v) 满足 $(u, v) \in [\rho_1 \Phi_1, \Theta_{[a]}] \times [\rho_2 \Phi_2, V_{\Theta_{[a]}}]$ 。

参考文献:

- [1] Beddington J R. Mutual interference between parasites or predators and its effect on searching efficiency[J]. J Animal Ecol, 1975, 44(1): 331-340
- [2] DeAngelis D L, Goldstein R A, O'Neill R V. A model for trophic interaction[J]. Ecology, 1975, 56(2): 881-892
- [3] Ryu K, Ahn I. Positive solutions for ratio-dependent predator-prey interaction systems[J]. J Differential Equation, 2005, 218(1): 117-135
- [4] Pao C V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations[M]. New York: Plenum Press, 1992
- [5] Hale J K, Waltman P. Persistence in infinite dimensional systems[J]. SIAM J Math Anal, 1989, 20: 388-395
- [6] Pao C V. Quasisolutions and global attractor of reaction-diffusion systems[J]. Nonlinear Anal, 1996, 26: 1889-1903

The Persistence of Positive Solutions for a Predator-prey Model with B-D Functional Response

GUO Gai-hui, LI Yan-ling

(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062)

Abstract: The asymptotic behavior for a kind of predator-prey models with Beddington-DeAngelis (BD) functional response is discussed. The method of upper and lower solutions and the theory of stability are used. The persistence of time-dependent positive solutions to this system is derived. In addition, a positive global attractor is presented by the method of upper and lower solutions for a class of elliptic system. The result gives certain conditions which ensure the persistence of species.

Keywords: Beddington-DeAngelis functional response; stability; uniform persistence